

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ

Сингулярное разложение — определённого типа разложение прямоугольной матрицы, имеющее широкое применение, в силу своей наглядной геометрической интерпретации, при решении многих прикладных задач. Переформулировка сингулярного разложения, так называемое разложение Шмидта, имеет приложения в квантовой теории информации, например, в запутанности.

Сингулярное разложение матрицы M позволяет вычислять сингулярные числа данной матрицы, а также левые и правые сингулярные векторы матрицы M :

- левые сингулярные векторы матрицы M — это собственные векторы матрицы MM^* ;
- правые сингулярные векторы матрицы M — это собственные векторы матрицы M^*M .

Где M^* — эрмитово-сопряжённая матрица к матрице M , для вещественной матрицы $M^* = M^T$.

Сингулярные числа матрицы не следует путать с собственными числами той же матрицы.

Сингулярное разложение является удобным при вычислении ранга матрицы, ядра матрицы и псевдообратной матрицы.

Сингулярное разложение также используется для приближения матриц матрицами заданного ранга.

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ

Сингулярные числа и сингулярные векторы [\[править | править код \]](#)

Неотрицательное вещественное число σ называется **сингулярным числом** матрицы M , когда существуют два вектора единичной длины $u \in K^m$ и $v \in K^n$ такие, что:

$$Mv = \sigma u, \text{ и } M^*u = \sigma v.$$

Такие векторы u и v называются, соответственно, **левым сингулярным вектором** и **правым сингулярным вектором**, соответствующим сингулярному числу σ .

Разложение матрицы [\[править | править код \]](#)

Сингулярным разложением матрицы M порядка $m \times n$ является разложение следующего вида

$$M = U\Sigma V^*,$$

где Σ — матрица размера $m \times n$ с неотрицательными элементами, у которой элементы, лежащие на главной диагонали — это сингулярные числа (а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми), а матрицы U (порядка m) и V (порядка n) — это две **унитарные** матрицы, состоящие из левых и правых сингулярных векторов соответственно (а V^* — это **сопряжённо-транспонированная матрица** к V).

ПСЕВДООБРАТНАЯ МАТРИЦА

A^+ называется псевдообратной матрицей для матрицы A , если она удовлетворяет следующим критериям:

1. $AA^+A = A$;
2. $A^+AA^+ = A^+$ (A^+ является слабым обращением в мультипликативной полугруппе);
3. $(AA^+)^* = AA^+$ (это означает, что AA^+ — эрмитова матрица);
4. $(A^+A)^* = A^+A$ (A^+A — тоже эрмитова матрица).

Если $A = U\Sigma V^*$ — сингулярное разложение A , тогда $A^+ = V\Sigma^+U^*$. Для диагональной матрицы, такой как Σ , псевдообратная получается из неё заменой каждого ненулевого элемента на диагонали на обратный к нему.